02-02-2024

# SO5: Modeller

## Modellering og statistisk analyse af bevægelse på skråplan

Elevnavne fjernet
SLOTSHAVEN GYMNASIUM 2S

# Indholdsfortegnelse

# Formål

Det overordnede formål er at fremstille nogle modeller, tegnede såvel som matematiske, der beskriver bevægelse på skråplan med dertilhørende energi og kræfter. Mere specifikt opstilles der en matematisk model for den distance, vores legobil vil bevæge sig på det vandrette plan. Denne model kan bruges til at bestemme den teoretisk middelværdi for strækningen. Den teoretiske middelværdi vil derefter blive sammenlignet med en empirisk middelværdi vha. T-testen.

# Teori

I dette teoriafsnit gennemgås først lidt baggrundsviden om mekanisk energi, gnidningskoefficient og T-testen. Efterfølgende opstilles der hhv. to tegnede modeller og en matematisk model for vores forsøg. Til sidst vil vi på baggrund af primært den matematiske model opstille vores hypotese, som er den udregnede teoretiske middelværdi for strækningen. Det involverer dog også et lille forsøg for at bestemme gnidningskoefficienten (ikke helt optimalt/traditionelt at have placeret i teoriafsnittet).

## Kort om mekanisk energi og gnidningskoefficient

I et isoleret system, hvor der ikke er nogen eksterne kræfter eller energitab (såsom friktion), vil den mekaniske energi (summen af kinetisk og potentiel energi) altid forblive konstant (energibevarelsen) - altså kan kinetisk energi omdannes til potentiel energi og omvendt, den samlede mængde af mekanisk energi ændres ikke (Lund, Kraaer, & Holck, 2023, p. p689):

$$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot}$$

Senere skal vi ved det lille *forberedende forsøg* bestemme den statiske gnidningskoefficient, derfor udledes formlen for denne her:

$$\overrightarrow{F_\mu} + \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_{snor}} = 0$$

Hvor $\overrightarrow{F_g}$ er tyngdekraftens komposant i kørselsretningen, heraf fås:

$$-(\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)) + (m \cdot g \cdot \sin(\alpha)) - F_{snor} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(m \cdot g \cdot \sin(\alpha)) - F_{snor} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - F_{snor}}{m \cdot g \cdot \cos(\alpha)}$$

Den dynamiske gnidningskoefficient udledes på stort set samme måde, her skal den resulterende kraft blot være lig med gnidningskraften trukket fra tyngdekraftens komposant i kørselsretningen, hvormed friktionskoefficienten bliver (se næste side):

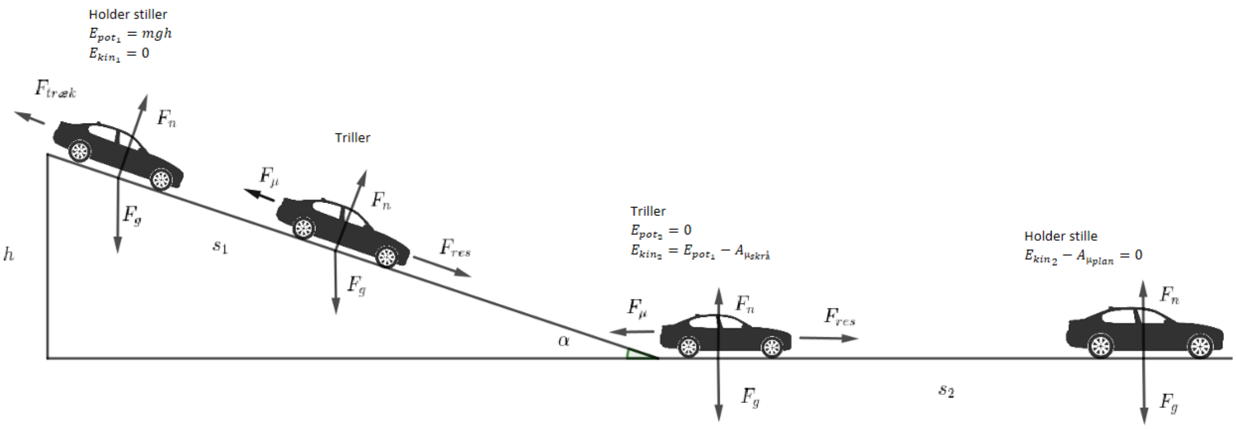
$$-F_{\mu} + F_g = F_{res} \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{g \cdot \sin(\alpha) - a}{g \cdot \cos(\alpha)}$$

Vi skal dog ikke bruge denne dynamiske gnidningskoefficient, men det kunne have været relevant, hvis vi havde haft tiden til det.

## Tegnet model

Herunder ses en ”universel” tegnet model af vores forsøg, der viser hvilke kræfter, der indvirker på vores Legobil forskellige steder på dens vej ned af rampen og langs planet:




*Figur 1*

Denne model illustrerer vores forsøgsopstilling påført bilens energitilstande på forskellige steder undervejs.

**Ved bil 1** er den potentielle energi lig med $m \cdot g \cdot h$, den kinetiske energi er lig med 0, da bilen ikke bevæger sig. $F_{træk}$ er den kraft, vi holder bilen med, så den står stille, hvilke burde svare til gnidningskraften.

**Ved bil 2** triller bilen ned af skråningen, hvorved den potentielle energi omdannes til kinetisk energi.

**Ved bil 3** har den ramt den anden strækning. Her er den potentielle energi lig med 0, og den kinetiske energi er dermed lig med den potentielle minus gnidningskraftens arbejde fra skråningen.

**Ved bil 4** er bilen bremset op af gnidningskraftens arbejde fra den plane vej. Dermed står bilen stille, og den kinetiske energi minus gnidningskraftens arbejde må være lig med nul.

## Kort om T-testen

T-testen er en test, der giver en værdi, der siger noget om, hvor god en sammenhæng, der er mellem en teoretisk middelværdi, μ, og en empirisk middelværdi, $\bar{x}$. Forudsætningen for at lave en t-test, er at populationen/datasættet, som man undersøger, antages at være normalfordelte. Princippet er, at en stor test-størrelse indikerer at den undersøgte forskel er signifikant, altså nulhyptesen forkastes, hvorimod en lille test-størrelse indikerer at forskellene er tilfældige, hvormed nulhypotesen accepteres (Noter i statistik (1), 2024).

T-værdien er i dette tilfælde defineret som følgende:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Variansen, der indgår i T-testen, er en "stikprøve-varians", hvor det er defineret, at der trækkes én fra det samlede antal af observationer, så vi får en spredning, der er en smule større, end den ville have været, hvis det ikke var en stikprøve:

$$var_{stik} = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{var}$$

T-værdien - og antallet af frihedsgrader - kan nu anvendes til at finde en P-værdi, som kan holdes op mod signifikansniveauet, som i vores tilfælde er 5% (Noter i statistik (2), 2024):

$$p < 0{,}05 \rightarrow H_0\ forkastes$$

Hvilket betyder, at mindre end 5% af data er tilfældigt og mere end 95% af data er signifikant forskelligt, hvormed nulhypotesen forkastes.

$$p > 0{,}05 \rightarrow H_0\ accepteres$$

Hvilket betyder, at mere end 5% af data er tilfældigt og mindre end 95% af data er signifikant forskelligt, hvormed nulhypotesen accepteres, da vi med vores videnskabelige signifikansniveau ikke kan konstatere, at data er forskelligt.

Her skal man være opmærksom på, at p-værdien fås ud fra arealet af "halen" af det normalfordelte data.

Vores nulhypotese er at den teoretiske middelværdi, µ, er lig med den empiriske middelværdi, $\bar{x}$:

$$H_0: \mu = \bar{x}$$

Den teoretiske middelværdi vil vi beregne på baggrund af vores matematiske model.

## Matematisk model

Jf. figur 1 så vil den potentielle energi, når bilen lige akkurat er nået ned af skråplanet, være omdannet til kinetisk energi minus den energi som friktionens arbejde langs skråplanen yder. Derfor gælder (se næste side):

$$E_{kin2} = E_{pot1} - \mathrm{A}_{\mu skrå} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h} - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot s_1 \Leftrightarrow$$

$$v^2 = 2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h} - 2 \cdot \mu \cdot \mathrm{g} \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{s}_1$$

$s_1$ er strækningen langs det skrå plan. Ovenstående giver kun mening når $h > \mu \cdot \cos(\alpha) \cdot s_1$, hvilket skyldes, at gnidningskræftens arbejde ikke må overstige den resulterende kræft, i så fald vil bilen stå stille.

Når bilen er nået $s_2$ hen ad vandret vil $E_{kin} - A_{\mu plan} = 0$, eftersom bilen står stille, heraf fås:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \mu \cdot m \cdot g \cdot s_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g \cdot \mu} \Leftrightarrow$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h} - 2 \cdot \mu \cdot \mathrm{g} \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{s}_1}{\mu \cdot g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \mathrm{h} - 2 \cdot \mu \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{s}_1}{\mu} = \frac{\mathrm{h} - \mu \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathrm{s}_1}{\mu}$$
$$= \frac{\mathrm{h}}{\mu} - \cos(\alpha) \cdot \mathrm{s}_1$$

OBS: vi antager, at friktionskoefficienten på det skrå og lodrette plan er ens.

Hermed har vi formlen/den matematiske model for, hvor langt bilen kører henad vandret:

$$\boldsymbol{s_2 = \frac{\mathrm{h}}{\mu} - \cos(\alpha) \cdot \mathrm{s}_1}$$

## Hypotese

Vi vil nu på baggrund af vores matematiske model opstille en hypotese for, hvor langt bilen vil bevæge sig på det vandrette plan ($s_2$). En hypotese som også vil være den teoretiske middelværdi i vores T-test.

De variabler i vores formel, som vi skal kende, før vi kan beregne den teoretiske middelværdi er: højden, $h$, strækningen af hypotenusen af skråplanet, $s_1$, vinklen, $\alpha$, og gnidningskoefficienten, $\mu$.

$h$ og $s_1$ måles (se evt. opstillingen på figur 3) og $\alpha$ beregnes:

- $h = 0{,}11\ m$
- $s_1 = 0{,}52\ m$
- $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{0{,}11}{0{,}52}\right) = 12{,}21°$

μ bestemmes ved at variere legobilens masse og vinkel (se forsøgsopstillingen på figur 2):

| | $m_{bil}$ (kg) | $v$ (°) | $F_{træk}$ (N) | μ |
|---|---|---|---|---|
| Måling 1 | 0,01662 | 32 | 0,06 | $\frac{0{,}01662 \cdot 9{,}82 \cdot \sin(32) - 0{,}06}{0{,}01662 \cdot 9{,}82 \cdot \cos(32)} = 0{,}1914$ |
| Måling 2 | $0{,}05763kg$ | 29° | $0{,}17N$ | $\frac{0{,}05763 \cdot 9{,}82 \cdot \sin(29) - 0{,}17}{0{,}05763 \cdot 9{,}82 \cdot \cos(29)} = 0{,}2108543$ |
| Måling 3 | $0{,}09953kg$ | 29° | $0{,}34N$ | $\frac{0{,}09953 \cdot 9{,}82 \cdot \sin(29) - 0{,}34}{0{,}09953 \cdot 9{,}82 \cdot \cos(29)} = 0{,}1565737$ |
| Måling 4 | $0{,}12281kg$ | 29° | $0{,}39N$ | $\frac{0{,}12281 \cdot 9{,}82 \cdot \sin(29) - 0{,}39}{0{,}12281 \cdot 9{,}82 \cdot \cos(29)} = 0{,}1845659$ |
| Måling 5 | $0{,}05763kg$ | 43° | $0{,}34N$ | $\frac{0{,}05763 \cdot 9{,}82 \cdot \sin(43) - 0{,}34}{0{,}05763 \cdot 9{,}82 \cdot \cos(43)} = 0{,}1110458$ |
| Måling 6 | $0{,}09953kg$ | 43° | $0{,}48N$ | $\frac{0{,}09953 \cdot 9{,}82 \cdot \sin(43) - 0{,}48}{0{,}09953 \cdot 9{,}82 \cdot \cos(43)} = 0{,}2610116$ |
| Måling 7 | $0{,}12281kg$ | 43° | 0,59 | $\frac{0{,}12281 \cdot 9{,}82 \cdot \sin(43) - 0{,}59}{0{,}12281 \cdot 9{,}82 \cdot \cos(43)} = 0{,}2635872$ |
| *Middelværdi* | | | | 0,1970055 |

*Tabel 1: Forberedende forsøg - bestemmelse af statisk gnidningskoefficient*

På baggrund af dette forberedende forsøg har vi fået en gennemsnitlig gnidningskoefficient på 0,19. Da vi udregner den statiske gnidningskoefficient, og eftersom det i virkeligheden er den dynamiske gnidningskoefficient, vi er interesserede i, betyder det nok, at gnidningskoefficienten reelt burde være en del lavere end ovenstående fundne middelværdi. Derfor antager vi, at den rigtige dynamiske gnidningskoefficient er 1/3 lavere end den fundne statiske, dermed bliver vores dynamiske gnidningskoefficient 0,13.

Nu har vi alle værdier til at bestemme den teoretiske værdi for strækningen på den vandrette flade.

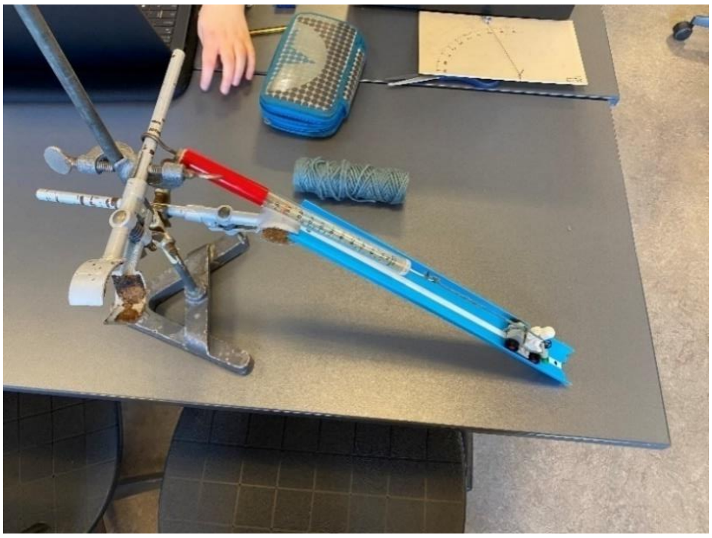
**Teoretisk værdi for $s_2$:**

$$s_2 = \frac{\mathrm{h}}{\mu} - \cos(\mathrm{v}) \cdot \mathrm{s}_1 = \frac{0{,}11\ m}{0{,}13} - \cos(12{,}21) \cdot 0{,}52\ m = 0{,}3379\ m$$

Vores hypotese bliver således, at legobilen kører $\mathbf{34}\ \boldsymbol{cm}$ henad det vandrette plan (vel og mærke kun når $h = 0{,}11\ m$, $s_1 = 0{,}53\ m$ og $\mu = 0{,}13$).

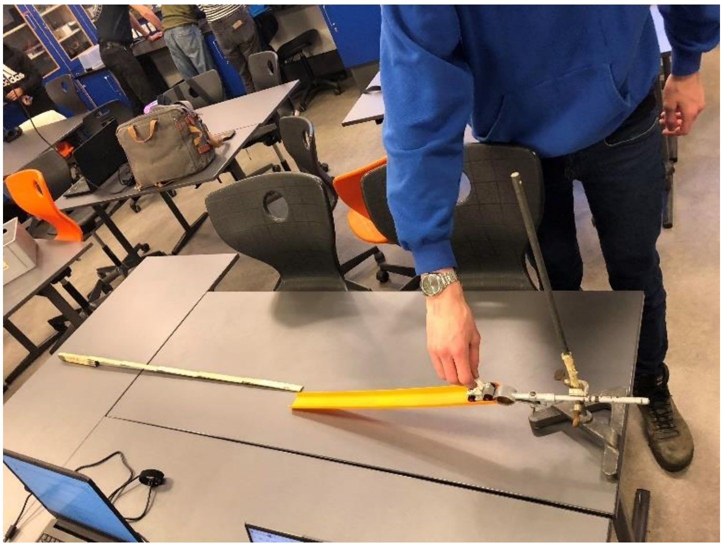
## Forsøgsopstilling(er)

Opstilling til at bestemme gnidningskoefficient:



*Figur 2: Forsøgsopstilling til bestemmelse af gnidningskoefficient*

Opstilling til at bestemme empirisk middelværdi:



*Figur 3: Forsøgsopstilling til rampen, h=0,11 m og rampen, s1=0,52 m*

## Fremgangsmåde

Fremgangsmåde for forsøget til at bestemme den empiriske middelværdi af distancen, $s_2$, er ganske simpel:

**Forberedelse**: Skråplanet skal være stabilt og jævnt, længden af skråplanet måles og noteres.

**Målinger**: Legobilen slippes og triller ned ad rampen for at fortsætte ud på bordet/den vandrette flade. Afstanden fra foden af rampen til det punkt, hvor bilen stopper, måles. Dette er afstanden $s_2$. Dette gentages mange gange (mere end 50 gange) for at sikre en stor nok datamængde.

## Måleresultater

Herunder er vores målinger:

| $s_2$ (cm) |
|---|
| 38,1 |
| 41,8 |
| 40,4 |
| 40,3 |
| 41,1 |
| 38,2 |
| 40,6 |
| 40,6 |
| 43,7 |
| 41,5 |
| 41,2 |
| 42,8 |
| 36,3 |
| 48 |
| 37,8 |
| 45,5 |
| 34,9 |
| 38,3 |
| 44,9 |
| 35,4 |
| 42,1 |
| 41,9 |
| 47,5 |
| 39,4 |
| 36,3 |
| 41,8 |
| 36,2 |
| 45,2 |
| 42,2 |
| 44,4 |
| 35,7 |
| 42,6 |

| |
|---|
| 35,3 |
| 39,5 |
| 38,6 |
| 42,8 |
| 41,4 |
| 38,9 |
| 37 |
| 42,5 |
| 38 |
| 37,9 |
| 40,5 |
| 32,7 |
| 43,3 |
| 38,9 |
| 41,4 |
| 44,8 |
| 40,3 |
| 33,4 |
| 43,3 |
| 40,7 |
| 44,5 |
| 36,5 |
| 33,2 |
| 40,6 |
| 43,8 |
| 34 |
| 40,9 |
| 39,8 |
| 41,7 |
| 42,5 |
| 30,9 |
| 39,3 |
| 43 |
| 43,7 |
| 38,5 |
| 39,6 |
| 43,6 |
| 43,6 |

*Tabel 2: Måleresultater, n=70*

## Databehandling

Måleresultater fra tabel 2 overføres til Excel og den empirisk middelværdi og spredning beregens jf. formlerne i teoriafsnittet i Excel:

| $s_2$ (m) | | var | | spredning |
|---|---|---|---|---|
| 0,381 | | 0,145161 | | |
| 0,418 | | 0,174724 | | |
| 0,404 | | 0,163216 | | |
| 0,403 | | 0,162409 | | |
| 0,411 | | 0,168921 | | |
| 0,382 | | 0,145924 | | |
| 0,406 | | 0,164836 | | |
| 0,406 | | 0,164836 | | |
| 0,437 | | 0,190969 | | |
| 0,415 | | 0,172225 | | |
| 0,412 | | 0,169744 | | |
| 0,428 | | 0,183184 | | |
| 0,363 | | 0,131769 | | |
| 0,48 | | 0,2304 | | |
| 0,378 | | 0,142884 | | |
| 0,455 | | 0,207025 | | |
| 0,349 | | 0,121801 | | |
| 0,383 | | 0,146689 | | |
| 0,449 | | 0,201601 | | |
| 0,354 | | 0,125316 | | |
| 0,421 | | 0,177241 | | |
| 0,419 | | 0,175561 | | |
| 0,475 | | 0,225625 | | |
| 0,394 | | 0,155236 | | |
| 0,363 | | 0,131769 | | |
| 0,418 | | 0,174724 | | |
| 0,362 | | 0,131044 | | |
| 0,452 | | 0,204304 | | |
| 0,422 | | 0,178084 | | |
| 0,444 | | 0,197136 | | |
| 0,357 | | 0,127449 | | |
| 0,426 | | 0,181476 | | |
| 0,353 | | 0,124609 | | |
| 0,395 | | 0,156025 | | |
| 0,386 | | 0,148996 | | |
| 0,428 | | 0,183184 | | |
| 0,414 | | 0,171396 | | |
| 0,389 | | 0,151321 | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0,37 | | 0,1369 | | |
| 0,425 | | 0,180625 | | |
| 0,38 | | 0,1444 | | |
| 0,379 | | 0,143641 | | |
| 0,405 | | 0,164025 | | |
| 0,327 | | 0,106929 | | |
| 0,433 | | 0,187489 | | |
| 0,389 | | 0,151321 | | |
| 0,414 | | 0,171396 | | |
| 0,448 | | 0,200704 | | |
| 0,403 | | 0,162409 | | |
| 0,334 | | 0,111556 | | |
| 0,433 | | 0,187489 | | |
| 0,407 | | 0,165649 | | |
| 0,445 | | 0,198025 | | |
| 0,365 | | 0,133225 | | |
| 0,332 | | 0,110224 | | |
| 0,406 | | 0,164836 | | |
| 0,438 | | 0,191844 | | |
| 0,34 | | 0,1156 | | |
| 0,409 | | 0,167281 | | |
| 0,398 | | 0,158404 | | |
| 0,417 | | 0,173889 | | |
| 0,425 | | 0,180625 | | |
| 0,309 | | 0,095481 | | |
| 0,393 | | 0,154449 | | |
| 0,43 | | 0,1849 | | |
| 0,437 | | 0,190969 | | |
| 0,385 | | 0,148225 | | |
| 0,396 | | 0,156816 | | |
| 0,436 | | 0,190096 | | |
| 0,436 | | 0,190096 | | |
| 0,402514 | | 0,165628 | | 0,406974 |

*Tabel 3: Databehandling (data indsæt fra Excel) - beregning af middelværdi, stikprøve-varians og spredning*

**Vores empirisk middelværdi jf. tabel 3:**

$$\bar{x} = 0{,}4025\ m$$

**Spredning jf. tabel 3:**

$$s = 0{,}407$$

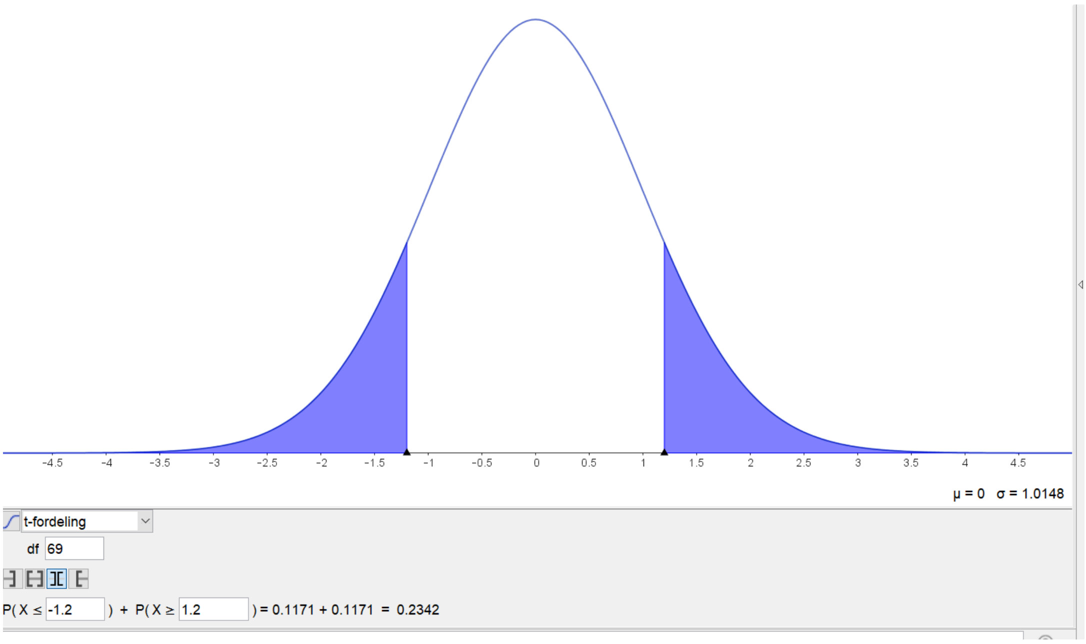
**T-værdi beregnes:**

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}4025 - 0{,}34}{\frac{0{,}407}{\sqrt{70}}} = 1{,}285$$

**P-værdi findes vha. GeoGebra:**

Antallet af frihedsgrader:

$$df = n - 1 = 70 - 1 = 69$$




*Figur 4: P-værdi fra GeoGebra*

$$P = 0{,}23$$

Vores nulhypotese er som sagt, at den empiriske strækning er lig med den teoretiske strækning:

$$H_0 : \mu = \bar{x}$$

Eftersom $0{,}23 > 0{,}05$ accepteres vores nulhypotese.

## Diskussion

Dét, vi hovedsageligt kan konkludere, er, at der ikke er nogen statistisk signifikant forskel mellem vores empiriske middelværdi, som vi har målt i forsøget, og den teoretiske middelværdi på 0,34 m, som vi har beregnet vha. vores matematiske model. Det afgøres på baggrund af vores p-værdi på 0,203, som overstiger et signifikansniveau på 0,05.

P-værdien fortæller, hvor sandsynligt det er, at de observerede resultater er signifikant forskellige fra den teoretiske værdi. Vores p-værdi på 0,23 svarer til, at der er 23% sandsynlighed for at vores resultater er tilfældige, og 77% sandsynlighed for, at der er en signifikant forskel mellem vores observerede data og vores teoretiske værdi. Selvom 77% lyder af meget, så skal der være over 99,5 % sandsynlighed for, at der er en signifikant forskel mellem vores observerede data og vores teoretiske værdi, før vi forkaster nulhypotesen. Med andre ord, der er en betydelig chance for, at de forskelle vi ser, kunne opstå som en del af den normale variation, og dermed accepteres vores nulhypotese.

Den teoretiske middelværdi, beregnet ud fra vores matematiske model, afhænger stærkt af den gnidningskoefficient, som vi beregnede gennem det forberedende eksperiment, hvor vi fik en statisk gnidningskoefficient på 0,19. Vi antog derefter, at den dynamiske gnidningskoefficient var 1/3 lavere end den statiske, hvilket gav en justeret gnidningskoefficient på 0,13. Dette er en utrolig vag antagelse, og derfor den vigtigste fejlkilde, der skaber en del usikkerhed i den teoretiske middelværdi. Det ville have været bedre at måle den dynamiske gnidningskoefficient direkte vha. et eksperiment (f.eks. ved at måle acceleration med en video-tracker), men vi vurderede, at tiden ikke var til det.

Udover ovenstående har vi også antaget, at friktionskoefficienten er ens for både skråplanet og det vandrette plan. Ligeledes har vi set bort fra luftmodstand og ujævnheder i overfladen, som kan forekomme i den ”virkelige verden”.

## Konklusion

Vores p-værdi blev større end det fastsatte signifikansniveau på 0,05, derfor accepteres nulhypotesen. Dette betyder, at der ikke er statistisk signifikant forskel mellem den empiriske middelværdi, som vi har målt i forsøget, og den teoretiske middelværdi på 0,34 m, som vi har beregnet vha. vores matematiske model.

# Litteraturliste

Lund, B. M., Kraaer, J., & Holck, P. (2023). *Orbit B htx/eux.* Århus: Systime.

Noter i statistik (1). (26. januar 2024). *t-test*. Hentet fra statnoter.dk: https://statnoter.dk/index.php?pageID=64

Noter i statistik (2). (26. januar 2024). *Princippet bag statistisk hypotesetest*. Hentet fra statnoter.dk: https://statnoter.dk/index.php?pageID=65